LAN-FITXA D.E.1

DERIBATUEN ERABILERAK I (Ariketa ebatziak)

1. $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$ funtzioa emanik:
   a. Kalkulatu f-ren asintotak.
   b. Adierazi zer tartetan den gorakorra eta zer tartetan beherakorra.
   c. Muturrik al du f funtzioak? Horrela balitz, zein puntutan?

(2018ko EKAINA-B)

2. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu gorakortasuna- eta beherakortasun-tarteak eta maximo, minimo eta asintoten existentzia.

(2018ko UZTAILA-A)

3. Jakinik $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioaren grafikoa (1,0) puntutik pasatzen dela eta x=0 puntuan 1 balioa hartzen duen muturra dela,
   a. Kalkulatu A, B eta C.
   b. X=0 muturra zer da, maximoa ala minimoa?

(2018ko UZTAILA-A)

4. Har dezagun $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$ funtzioa:
   a. Kalkula ezazu A, B eta C, jakinik $x = 0$ abszisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea horizontala dela, $x = 2$ abszisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, OX ardatza ebakitzen duela $x = 1$ denean.
   b. Lortutako balioetarako, kalkulatu funtzioaren maximoak eta minimoak.

(2017ko EKAINA-A)

5. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x}{1-x^2}$
   a. Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra?
   b. Arrazoitu ea maximoa eta minimorik duen. Baizkoan aurki ezazu.
   c. Kalkulatu kurba horrek $x = 0$ abszisako puntuan duen zuzen ukitzailea.

(2017ko EKAINA-B)

6. Badakigu $y = 2x - 10$ zuzena $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1, -8)$ puntuan.
   a. Kalkulatu A-ren eta B-ren balioak.
   b. Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y = -15x - 1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebaki-puntuak.

(2017ko UZTAILA-A)

7. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x^3+4}{x^2}$
   a. Arrazoitu ea funtzioak maximo edo minimorik dituen ala ez. Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.
   b. Zer tartetan da gorakorra funtzioa?
   c. Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

(2017ko UZTAILA-A)

8. Azter ezazu funtzio honen goratze- eta beheratze-tarteak: $y = \frac{x^3}{x^2-4}$

   Eta kalkula itzazu haren maximoak eta minimoak.

(2016ko EKAINA-A)

9. Funtzio hau emanda: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

a) Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak, funtzioak propietate hauek bete ditzan:
- (0,0) puntutik pasatzea.
- Maximo lokal bat izatea (1,2) puntua.

b) Kalkula itzazu x aldagaiaren balio guztiak zeinetan funtzioaren grafikoak ukitzaile horizontala baitu.

(2016ko EKAINA-B)

10. Kalkula itzazu A, B, C eta D balioak funtzio honek: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ mutur erlatiboak izan ditzan (0,0) eta (2,2) puntuetan.

(2016ko UZTAILA-A)

11. Funtzio polinomiko hau emanda: $p(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$

a) Kalkula itzazu p(x)-ren goratze- eta beheratze-tarteak.
b) Aurkitu haren maximoak eta minimoak.
c) Ba al da x-ren balioren bat $p(x) < 0$ izatea dakarrena? Arrazoitu zergatia.

(2016ko UZTAILA-B)

12. Polinomio hau emanda: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

a) Zehaztu a, b eta c koefizienteak, jakinik $x = -1$ eta $x = 1$ balioetan mutur erlatiboak dituela eta gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen dela.
b) Aztertu bi mutur erlatibo horien izaera (maximoak ala minimoak diren) eta egin polinomioaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2015ko EKAINA-A)

13. Izan bedi funtzio hau: $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

a) Kalkulatu f funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.
b) Kalkulatu f-ren mutur erlatiboak (maximo eta minimoak).

(2015ko EKAINA-B)

14. Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontala eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

(2015ko UZTAILA-A)

15. Funtzio hau emanda:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & baldin\ x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & baldin\ x > 2 \end{cases}$$

a) Aurkitu a eta b-ren balioak, jakinik f zuzen erreal osoan deribagarria dela.
b) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x=1 abszisa puntuan.

(2015ko UZTAILA-B)

16. Har dezagun funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + c$

a) Lor itzazu a-ren, b-ren eta c-ren balioak, funtzioa koordenatu jatorritik pasa dadin eta (1,-1) puntuan minimo bat izan dezan.
b) Hala lortutako funtzioak ba al du beste maximorik edo minimorik?

(2014ko EKAINA-A)

17. Badakigu F funtzioa puntu guztietan deribagarria dela, $(-\infty, 0]$ tartean $F(x) = 1 + 2x + Ax^2$ formulak definitzen duela eta $(0, \infty)$ tartean, berriz, formula honek: $F(x) = B + Ax$

a) Aurkitu ezazu zer balio izan behar duten A-k eta B-k aurreko baldintzak bete daitezen.
b) Irudika ezazu F.

(2014ko EKAINA-B)

18. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funtzioa emanda, azter itzazu haren goratze- eta beheratza-tarteak eta maximo eta minimoak.
Egin itzazu f-ren gutxi gorabeherako grafiko bat, eta erantzun iezaiozu, arrazoituz, galdera honi: x-ren zenbat baliok betetzen dute f(x)=0 izatea?

(2014ko UZTAILA-A)

19. Badakigu A eta B zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura, A·B; maximoa izan dadin.

(2014ko UZTAILA-B)

20. f funtzioa ekuazio honek definitzen du: $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ Kalkula itzazu, arrazoituz:

a) *f(x)* funtzioaren definizio eremua.
b) *f(x)* funtzioaren goratze- beheratze-tarteak.
c) Egin ezazu funtzio horren grafikoaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2013ko EKAINA-A)

21. 200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat. Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azaleren baturak minimoa izan behar du.

(2013ko EKAINA-B)

22. Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurotan adierazita) irekia duen n denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera: $B(n) = -4n(2n^2 - 15n + 24)$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.
b) Irabazi maximo horien balioa.

(2013ko UZTAILA-A)

23. $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa emanda:

a) Kalkula itzazu *A, B* eta *C* parametroen balioak, funtzioak *x=0* abszisa-puntuan mutur bat izan dezan eta *x=2* puntuan beste mutur bat. Balio bakarrekoak dira parametro horiek?
b) Zehaztu ezazu zer mutur mota den (maximoa edo minimoa).
c) Irudika ezazu funtzioa ¨*C=0* kasuan

(2013ko UZTAILA-B)

24. $f(x) = Ax^3 + \mathrm{B}x$ funtzioa izanik, badakigu P(1,1) puntutik pasatzen dela eta, gainera, puntu horretan haren tangentea $y = -3x$ zuzenaren paraleloa dela.

a) Datu horiek jakinik, kalkula itzazu A-ren eta B-ren balioak.
b) Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak; azkenik, marraztu ezazu funtzioa. (2012ko EKAINA-A)

25. Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.
Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.

(2012ko EKAINA-B)

26. Har dezagun $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa:

a) Kalkula ezazu A, B, eta C parametroen balioak *f*-ren grafikoa (1,1) puntutik pasa dadin, *x=4* balioan maximo bat izan dezan eta *x=0* balioan ukitzaile horizontal bat izan dezan.
b) Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak, eta marraztu ezazu funtzioaren grafikoa.

(2012ko UZTAILA-A)

27. Denda batean olioa saltzen da 2 eurotan litroa. x litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adierazita) hauek dira: $0{,}5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu C-ren balioa eta lortutako etekin maximoa:

(2012ko UZTAILA-B)

28. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-2x}$ funtzioa.

a) Aztertu funtzioaren gorapen- eta beherapen-tarteak.
b) Aztertu funtzioaren maximo eta minimoak eta egin haren grafikoaren eskema.

(2011ko EKAINA-A)

29. Izan bedi $f(x) = x^3 + ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$.
Aurkitu a, b eta c parametroen balioak baldintza hauek aldiberean bete daitezen: f funtzioaren grafikoa (0,1) puntutik igarotzen da, f funtzioaren ukitzaileak *x=0* eta *x=1* balioetarako $y = 3x + 5$ zuzenarekin paraleloak dira.

(2011ko EKAINA-B)

30. Aztertu funtzio honen muturrak eta asintotak: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Egin grafikoaren eskema.

(2011ko UZTAILA-A)

31. f funtzio bati buruz datu hauek ezagunak dira: $\mathbb{R}$ osoan deribagarria da, $\mathbb{R}$ osoan gorakorra da eta puntu guztietan *f(x)>0* desberdintza betetzen da. Datu horiekin froga ahal daiteke $h(x) = e^{f(x)} - f(x)$ gorakorra dela $\mathbb{R}$ osoan? Erantzuna arrazoitu.

(2011ko UZTAILA-B)

32. Aztertu $f(x) = x^3 - 12\mathrm{x} - 8$ funtzioaren maximo eta minimoak eta gorapen- eta beherapen-tarteak. Adierazi grafikoki f funtzioa.

(2010ko EKAINA-A)

33. Idatzi $y = 10x + 2$ zuzenarekiko paraleloak diren eta $f(x) = 4x^3 - 2\mathrm{x} + 1$ kurbaren ukitzaileak diren zuzenen ekuazioak. Aztertru f funtzioaren maximo eta minimoak.

(2010ko EKAINA-A)

34. Merkatari batek kafea saltzen du 2 € eta 75 zentimotan kiloa. Bi motatako gastuak ditu, merkantziaren garraioa eta herri-ogasunari ordaindu beharreko zerga bat. Saltzen duen kilo bakoitzeko, garraioaren gastua 25 zentimokoa da. Herri-ogasunari ordaindu beharreko euro kopurua kalkulatzeko, saldutako kilo kopuruaren karratua zati 1200 egin behar da. Aurreko datuekin kalkulatu merkatariak saldu behar duen kilo kopurua irabazia maximoa izateko, eta kalkulatu irabazi maximo hori. (2010ko UZTAILA-A)

Ebazpenak:

1. $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-4}$ funtzioa emanik:

a. Kalkulatu f-ren asintotak.
b. Adierazi zer tartetan den gorakorra eta zer tartetan beherakorra.
c. Muturrik al du f funtzioak? Horrela balitz, zein puntutan?

(2018ko EKAINA-B)

(a)

- Asintota horizontala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \ \ (konstantea); orduan, \boxed{\boldsymbol{y = k}}$$

funtzioaren asintota horizontala da.

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{\infty}{\infty} \to \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{\boldsymbol{y = 1}}$$

Asintota horizontala

- Asintota bertikala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ \ ; orduan, \qquad \boxed{\boldsymbol{x = a}}$$

funtzioaren asintota bertitala da.

Funtzio arrazionaletan, asintota bertikalik izatekotan, izendatzailearen erroren bat izango da:

$$x^2 - 4 = 0 \ \to \ \begin{Bmatrix} x = 2 \\ x = -2 \end{Bmatrix} \to Asintota\ bertikal\ posibleak$$

Egiazta dezagun ea asintota bertikalak diren,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \boxed{\frac{1}{0}} \to (\pm\infty) \to \begin{matrix} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 2}\ A.B.}$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \boxed{\frac{1}{0}} \to (\pm\infty) \to \begin{matrix} \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3}{x^2-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = -2}\ A.B.}$$

(b-c)

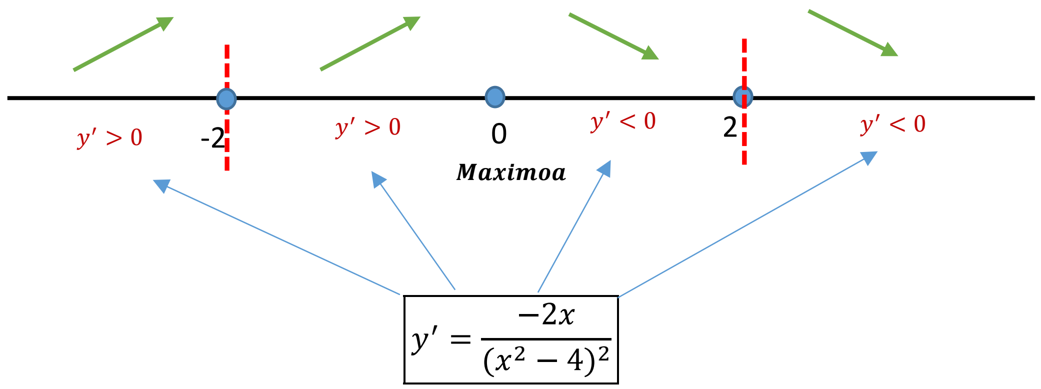
- Funtzioaren lehenengo deribatuak gorapen-beherapen eta maximo-minimo erlatiboei buruzko informazioa emango digu:

$$y=\frac{x^2-3}{x^2-4}\rightarrow y'=\frac{2x\cdot(x^2-4)-2x(x^2-3)}{(x^2-4)^2}\rightarrow y'=\frac{2x^3-8x-2x^3+6x}{(x^2-4)^2}$$
$$\rightarrow y'=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

Funtzio honen hazkundea alda daiteke deribatuaren erroetan edota asintota bertikaletara hurbiltzean:

- $y'=0\ \rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow -2x=0\rightarrow \boldsymbol{x=0}$
- $\boldsymbol{x=2}$ *eta* $\boldsymbol{x=-2}$ *asintota bertikalak*

Hiru balio hauek lau tartetan banatzen dute zuzen erreala. Tarte bakoitzean y' deribatuaren ikurrak funtzioa gorakorra $(y'+)$ ala beherakorra $(y'-)$ den esango digu:



Laburtuz:

Goratze-tarteak: $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)$
Beheratze-tarteak: $x\in(0,2)\cup(-2,\infty)$
Maximo erlatiboak: $x=0\rightarrow y=\frac{(0)^2-3}{(0)^2-4}=\frac{3}{4}\rightarrow M\left(0,\frac{3}{4}\right)$
Minimo erlatiboak: ez dago

2. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-x}$ funtzioa. Aztertu gorakortasuna- eta beherakortasun-tarteak eta maximo, minimo eta asintoten existentzia.

(2018ko UZTAILA-A)

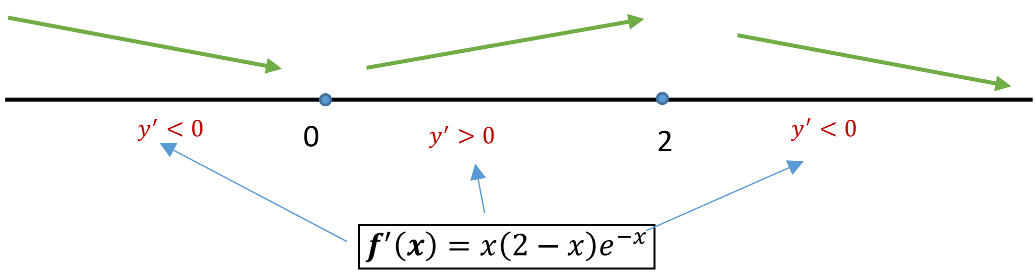
Gorakortasuna-beherakortasuna. Maximo-minimoak.

$f(x) = x^2e^{-x}$

Deribatua aztertuko dugu, honen ikurrak zein tartetan funtzioa gorakorra eta zein beherakorra den esango digu; baita muturrik duen ere:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2e^{-x} \cdot (-1) \rightarrow f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2-x)e^{-x} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \cancel{e^{-x} = 0} \\ x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0} \\ 2 - x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 2} \end{array}$$



Goratze-tarteak: $x \in (0,2)$

Beheratze-tarteak: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Maximo erlatiboak: $x = 2, \rightarrow f(2) = (2)^2e^{-2} = 0 \rightarrow \boldsymbol{Max.\,(2, 4e^{-2})}$

Minimo erlatiboak: $x = 0, \rightarrow f(0) = (0)^2e^{0} = 0 \rightarrow \boldsymbol{min.\,(0,0)}$

Asintotak

- Asintota horizontala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k \ \ (konstantea); orduan, \boxed{\boldsymbol{y = k}} \ \boldsymbol{Asintota\ Horizontala}$$

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \ (e^x \gg x^2 \ delako) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = 0}} \Rightarrow$$

Asintota Horizontala

$x \to \infty$ *doanean*

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (-\infty)^2 \cdot e^{-(-\infty)} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \Rightarrow$$

$x \to -\infty$ doanean ez du asintota horizontalalik

Funtzioa ∞ doa; adar parabolikoa du Y ardatzaren norabidean.

- Asintota bertikala izan dezan zera egiaztatu behar da:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ ; orduan, \qquad \boxed{\boldsymbol{x = a}}\ \boldsymbol{Asintota\ bertikala}$$

Ez du asintota bertikalik, $\lim_{x\to a} x^2e^{-x} = \lim_{x\to a}\frac{x^2}{e^x} = 0 \neq \pm\infty$ delako; ez dago **a**-ren balio finitorik, non $x \to a$ doala funtzioa infiniturantz doan.

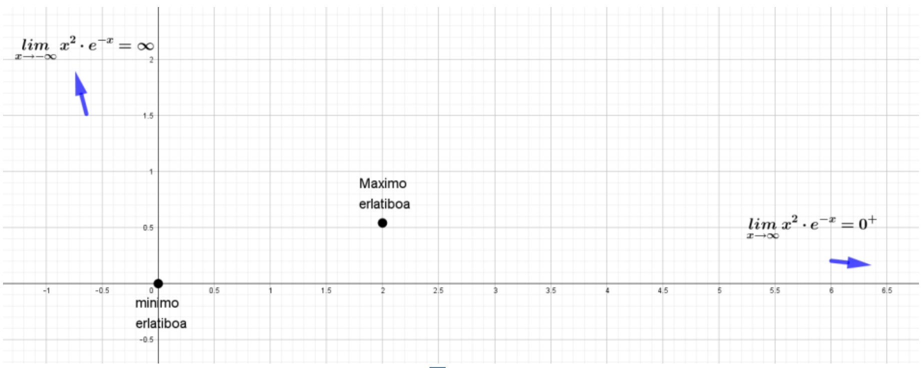
- Asintota zeiharra $y = mx + n$ izateko:

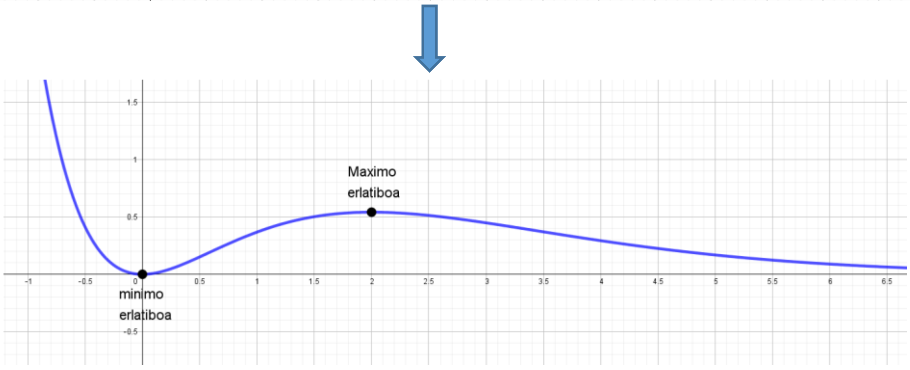
$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \neq 0 \ \ eta \ \neq \pm\infty \quad \textbf{eta} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) \neq \pm\infty$$

Emandako funtzioan aplikatuz,

$$\boldsymbol{m} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{ez\ du\ asintota\ zeiharrik}$$

<u>**Adierazpen grafikoa:**</u>





Minimo erlatiboa , minimo absolutua da, funtzioak ezbaitu balio txikiagorik hartzen (x=0 denean funtzioaren balioa y=0).

3. Jakinik $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioaren grafikoa (1,0) puntutik pasatzen dela eta x=0 puntuan 1 balioa hartzen duen muturra dela,

a. Kalkulatu A, B eta C.

b. x=0 muturra zer da, maximoa ala minimoa?

(2018ko UZTAILA-A)

(a)

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Azter dezagun emandako informazioa banan-banan:

- Funtzioaren grafika (1,0) puntutik igarotzen da; beraz:

$$f(1) = 0 \;\Rightarrow\; 1^3 + A\cdot 1^2 + B\cdot 1 + C = 0 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A+B+C=-1}}$$

- x=0 denean funtzioaren balioa (muturra dela ondoren erabiliko da) 1 da; beraz:

$$f(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0^3 + A\cdot 0^2 + B\cdot 0 + C = 1 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{C=1}}$$

- x=0 denean funtzioak muturra du; beraz, lehenengo deribatua anulatu egingo da x=0 ordezkatzean (beharrezko baldintza muturra izateko):

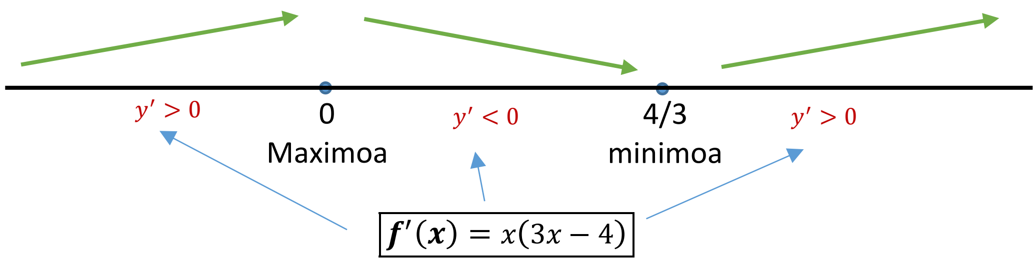
$$f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; 3\cdot 0^2 + 2A\cdot 0 + B = 0 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{B=0}}$$

Ondorioz,

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=-1\\ C&=1\\ B&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{A}&=\boldsymbol{-2}\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}&=\boldsymbol{1} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(x)=x^3-2x^2+1}}$$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$

Deribatuaren erroetan muturrak aurkitzen dira: $f'(x) = 0 \Rightarrow x(3x-4) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{4}{3} \end{array}$



Hortaz, x=0 abszisa-puntuan funtzioak duen muturra maximo erlatiboa da. Beste mutur bat ere badu, x=4/3 denean minimo erlatiboa.

4. Har dezagun $f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7$ funtzioa:

a. Kalkula ezazu A, B eta C, jakinik $x = 0$ abszisako puntuan funtzioaren zuzen ukitzailea horizontala dela, $x = 2$ abszisako puntuan mutur erlatibo bat duela eta, gainera, OX ardatza ebakitzen duela $x = 1$ denean.

b. Lortutako balioetarako, kalkulatu funtzioaren maximoak eta minimoak.

(2017ko EKAINA-A)

$$f(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 7 \rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$x=0$ denean ukitzailearen malda $= 0 \rightarrow f'(0)=0$ $\Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 4\cdot 0^3 + 3A\cdot 0^2 + 2B\cdot 0 + C = 0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$x=2$ denean mutur erlatiboa, hau da, $f'(2)=0$ $\Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow 4\cdot 2^3 + 3A\cdot 2^2 + 2B\cdot 2 + \overset{=0}{C} = 0$

$32 + 12A + 4B = 0$

$12A + 4B = -32 \xrightarrow{(:4)} \boxed{3A + B = -8}$

$x=1$ denean, funtzioaren grafikak OX ardatza ebaki; hau da $f(1)=0$ $\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 1^4 + A\cdot 1^3 + B\cdot 1^2 + \overset{=0}{C}\cdot 1 + 7 = 0$

$1 + A + B + 0 + 7 = 0$

$\boxed{A + B = -8}$

$$\left.\begin{array}{l} 3A + B = -8 \\ A + B = -8 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0 \text{ eta } B = -8$$

Beraz, funtzioaren adierazpena: $\boxed{f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}$

b) $f'(x) = 4x^3 - 16x \xrightarrow{f'(x)=0} 4x^3 - 16x = 0$

$4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$; $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x=2}$, $\boxed{x=-2}$

$-\infty$		-2		0		2		∞
	$f'<0$		$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$	
	$f \searrow$	minimo erlatiboa	$f \nearrow$	Maximo erlatiboa	$f \searrow$	minimo erlatiboa	$f \nearrow$	

$x=-2 \rightarrow f(-2) = (-2)^4 - 8\cdot(-2)^2 + 7 = 16 - 32 + 7 = -9 \rightarrow \boxed{m_1(-2,-9)}$ minimo erlatiboa edo lokala

$x = 0 \rightarrow f(0) = 7 \rightarrow \boxed{M(0,7)}$ Maximo erlatiboa

$x = 2 \rightarrow f(2) = -9 \rightarrow \boxed{m_2(2,-9)}$ minimo erlatiboa

5. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x}{1-x^2}$

a. Zein da funtzioaren eremua? Zer tartetan da gorakorra?
b. Arrazoitu ea maximoa eta minimorik duen. Baizkoan aurki ezazu.
c. Kalkulatu kurba horrek $x = 0$ abszisako puntuan duen zuzen ukitzailea.

(2017ko EKAINA-B)

(a,b)

Definizio-eremua: $\mathbb{R} - \{\mathbf{-1}, \mathbf{1}\}$

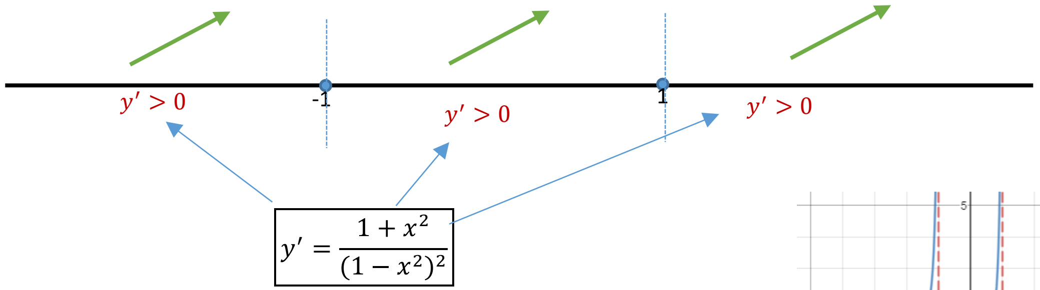
Lehenengo deribatuaren ikurren azterketa:

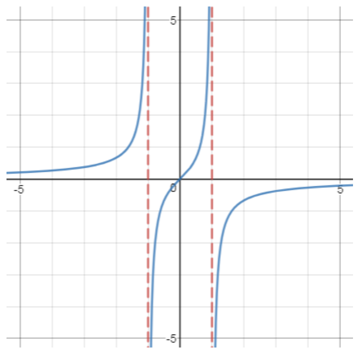
$$y = \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y' = \frac{1\cdot(1-x^2) - x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} \rightarrow y' = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} \rightarrow y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

Jakina denez, funtzio baten zeinua alda daiteke funtzioaren erroetan edota ez-jarraitasun puntuetan. Deribatuaren erroak eta ez-jarraitasun puntuak (izendatzailearen zeroak):

- $y' = 0 \rightarrow \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow 1 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow ez\ du\ soluziorik.\ deribatuak\ ez\ du\ errorik.$
- $Izendatzailea = 0 \rightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \boxed{x = -1} \end{cases} Asintota\ bertikalak$

Balio hauek zuzen errealean kokatu eta gero, tarte bakoitzean y' deribatuak hartzen duen ikurra aztertuko da tarteko edozein balio deribatuan ordezkatuz:





Goratze-tarteak: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty)$
Beheratze-tarteak: ez da beherakorra
Maximo erlatiboak: ez du maximorik
Minimo erlatiboak: ez du minimorik

(c)

$$x = 0\ denean\ funtzioaren\ balioa: f(0) = \frac{0}{1-0^2} = 0 \ \rightarrow P(0,0)$$

Zuzen ukitzailearen malda kalkulatzeko, $x = 0$ deribatuan ordezkatu behar da:

$$y' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \rightarrow \boldsymbol{m} = y'(0) = \frac{1+0^2}{(1-0^2)^2} = \mathbf{1}$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$\left.\begin{matrix} P(0,0) \\ m = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow y = y_0 + m(x - x_0) \ \rightarrow \ y = 0 + 1\cdot(x-0) \ \rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = x}}$$

6. Badakigu $y = 2x - 10$ zuzena $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1$ funtzioaren grafikoaren ukitzailea dela $P(1, -8)$ puntuan.

a. Kalkulatu A-ren eta B-ren balioak.

b. Kalkulatu $f(x)$ funtzioaren eta $y = -15x - 1$ ekuazioa duen zuzenaren arteko ebaki-puntuak.

(2017ko UZTAILA-A)

(a)

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx - 1 \;\rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$$

Azter dezagun emandako informazioa banan-banan:

- Funtzioaren grafika (1,-8) puntutik igarotzen da; beraz:

$$f(1) = -8 \;\Rightarrow\; 1^3 + A \cdot 1^2 + B \cdot 1 - 1 = -8 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{A + B = -8}}$$

- (1,-8) puntuko zuzen ukitzailea $y = 2x - 10$ da; beraz, malda=2. Orduan, deribatuaren balioa x=1 denean 2 da :

$$f'(1) = 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 1^2 + 2A \cdot 1 + B = 2 \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{2A + B = -1}}$$

Ondorioz,

$$\left.\begin{array}{r} A + B = -8 \\ 2A + B = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} A = 7 \\ B = -15 \end{array} \;\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f(x) = x^3 + 7x^2 - 15x - 1}}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{r} y = -15x - 1 \\ y = x^3 + 7x^2 - 15x - 1 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 + 7x^2 - 15x - 1 = -15x - 1 \rightarrow$$

$$x^3 + 7x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2(x + 7) = 0 \;\rightarrow\; \begin{array}{c} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = -7} \end{array}$$

7. Funtzio hau emanda: $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

a. Arrazoitu ea funtzioak maximo edo minimorik dituen ala ez. Baldin eta halakoak baditu, kalkula itzazu.
b. Zer tartetan da gorakorra funtzioa?
c. Aurkitu funtzioaren asintota guztiak.

(2017ko UZTAILA-A)

(a-b)

Funtzioaren lehenengo deribatuaren zeinuak gorapen eta beherapen tarteak emango dizkigu eta baita mutur erlatiboei (maximo-minimo) buruzko informazioa ere:

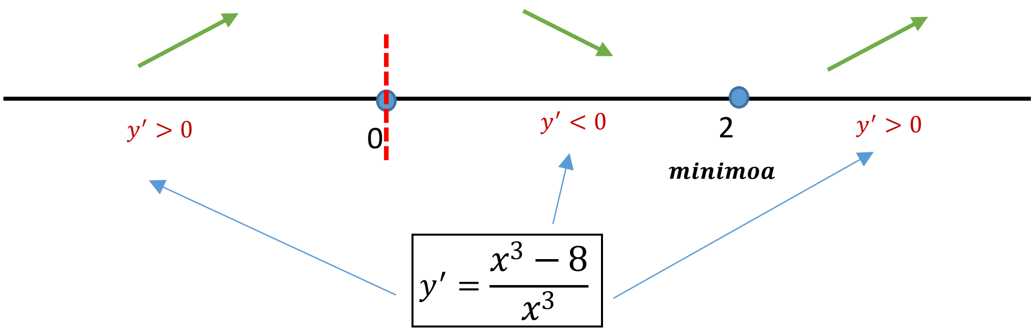
$$y = \frac{x^3+4}{x^2} \to y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+4) \cdot 2x}{(x^2)^2} \to y' = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} \to y' = \frac{x^4 - 8x}{x^4} \to y' = \frac{x(x^3-8)}{x^4}$$

$$\boldsymbol{y' = \frac{x^3-8}{x^3}}$$

Funtzio honen hazkundea alda daiteke deribatuaren erroetan edota asintota bertikaletara hurbiltzean:

- $y' = 0 \to \boldsymbol{\frac{x^3-8}{x^3}} = 0 \to x^3 - 8 = 0 \to \boldsymbol{x = 2}$
- $\boldsymbol{x = 0}$ *asintota bertikalak*

Hiru balio hauek hiru tartetan banatzen dute zuzen erreala. Tarte bakoitzean y' deribatuaren ikurrak funtzioa gorakorra $(y' +)$ ala beherakorra $(y' -)$ den esango digu:



<u>Laburtuz:</u>

Goratze-tarteak:	$x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Beheratze-tarteak:	$x \in (0,2)$
Maximo erlatiboak:	ez du maximorik.
Minimo erlatiboak:	$x = 2 \to y = \frac{2^3+4}{2^2} = \frac{12}{4} = 3 \to min.\,(2,3)\ puntuan$

(c)

Asintota horizontala

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1}=\infty \ (ez\ dauka\ asintota\ horiz.)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1}=-\infty \ (ez\ dauka\ asintota\ horiz.)$$

Asintota bertikala

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2}=\frac{4}{0}\to(\infty)\to \begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3+4}{x^2}=+\infty\end{matrix}\to \boxed{x=0}\ asint.bertikala$$

Asintota zeiharra

Zatiketa egin ondoren, zatidura asintota zeiharra da

$$\begin{array}{r|l} x^3+4 & x^2 \\ \hline -x^3 & x \\ \hline 4 & \end{array} \to \boxed{y=x}\ \textbf{asintota zeiharra}$$

Nola hurbiltzen da funtzioa asintota zeiharrera?

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{x^3+4}{x^2} \\ y=x\end{matrix}\right\}\begin{matrix} \xrightarrow{x=100} y_{Funtz.}=\frac{100^3+4}{100^2}=100{,}0004 \\ y_{asint.}=100 \\ \xrightarrow{x=-100} y_{Funtz.}=\frac{(-100)^3+4}{(-100)^2}=-99{,}9996 \\ y_{asint.}=-100\end{matrix}$$

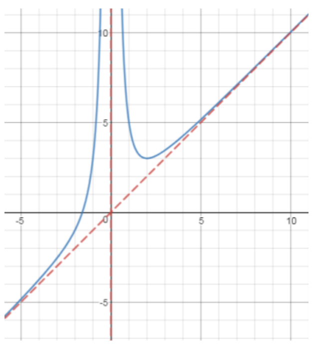
$x\to\infty$ *doala*: $y_{Funtz.}>y_{asint.}$

Funtzioa asintotaren gainetik

$x\to-\infty$ *doala*: $y_{Funtz.}>y_{asint.}$

Funtzioa asintotaren gainetik

Adierazpen grafikoa:



8. Azter ezazu funtzio honen goratze- eta beheratze-tarteak: $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ Eta kalkula itzazu haren maximoak eta minimoak. (2016ko EKAINA-A)

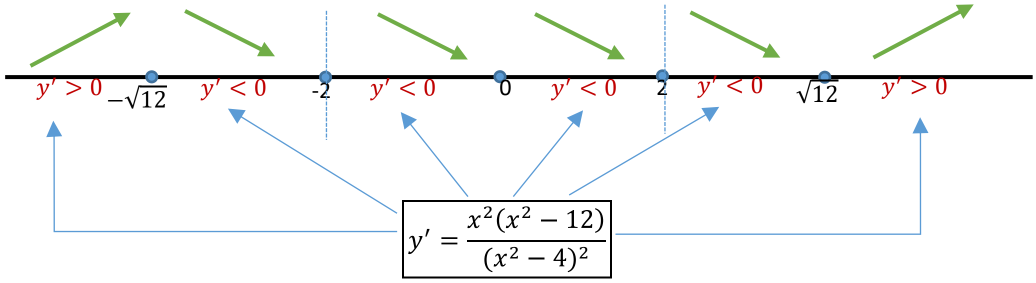
Lehenengo deribatuaren ikurren azterketa:

$$y=\frac{x^3}{x^2-4}\rightarrow y'=\frac{3x^2\cdot(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2}\rightarrow y'=\frac{3x^4-12x^2-2x^4}{(x^2-4)^2}\rightarrow y'=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$$

Jakina denez, funtzio baten zeinua alda daiteke funtzioaren erroetan edota ez-jarraitasun puntuetan. Deribatuaren erroak eta ez-jarraitasun puntuak (izendatzailearen zeroak):

- $y'=0\rightarrow\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}=0\rightarrow x^4-12x^2=0\rightarrow x^2(x^2-12)=0\rightarrow\begin{cases}x^2=0\rightarrow\boxed{x=0}\\ x^2-12=0\rightarrow\begin{cases}\boxed{x=\sqrt{12}}\\ \boxed{x=-\sqrt{12}}\end{cases}\end{cases}$
- $Izendatzailea=0\rightarrow(x^2-4)^2=0\rightarrow x^2-4=0\rightarrow x^2=4\rightarrow\begin{cases}\boxed{x=2}\\ \boxed{x=-2}\end{cases}$

Balio hauek zuzen errealean kokatu eta gero, tarte bakoitzean y' deribatuak hartzen duen ikurra aztertuko da tarteko edozein balio deribatuan ordezkatuz:



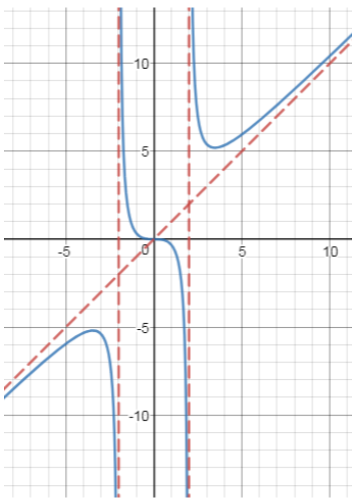
Goratze-tarteak: $x\in(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},\infty)$

Beheratze-tarteak: $x\in(-\sqrt{12},-2)\cup(-2,2)\cup(2,\sqrt{12})$

Maximo erlatiboak: $x=-\sqrt{12}\rightarrow y=\frac{(-\sqrt{12})^3}{(-\sqrt{12})^2-4}=\frac{-12\sqrt{12}}{8}=\frac{-3\sqrt{12}}{2}\rightarrow M\left(-\sqrt{12},-\frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$

Minimo erlatiboak: $x=\sqrt{12}\rightarrow y=\frac{(\sqrt{12})^3}{(\sqrt{12})^2-4}=\frac{12\sqrt{12}}{8}=\frac{3\sqrt{12}}{2}\rightarrow m\left(\sqrt{12},\frac{3\sqrt{12}}{2}\right)$

Adierazpen grafikoa:



9. Funtzio hau emanda: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$
   a) Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak, funtzioak propietate hauek bete ditzan:
      - (0,0) puntutik pasatzea.
      - Maximo lokal bat izatea (1,2) puntua.
   b) Kalkula itzazu x aldagaiaren balio guztiak zeinetan funtzioaren grafikoak ukitzaile horizontala baitu. (2016ko EKAINA-B)

a) $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C \rightarrow f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$

Emandako datuen arabera:

- $(0,0) puntutik\ igaro \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow A \cdot 0^3 + B \cdot 0^2 + C = 0 \rightarrow \boxed{\boldsymbol{C = 0}}$
- $(1,2) puntutik\ igaro \rightarrow f(1) = 2 \rightarrow A \cdot 1^3 + B \cdot 1^2 + C = 2 \rightarrow \boxed{A + B = 2}$
- $(1,2) puntuan\ Max. \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 3A \cdot 1^2 + 2B \cdot 1 = 0 \rightarrow \boxed{3A + 2B = 0}$

Ekuazio-sistema ebatziz,

$$\left.\begin{array}{r} A + B = 2 \\ 3A + 2B = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \boxed{\boldsymbol{A = -4}} \\ \boxed{\boldsymbol{B = 6}} \end{array}$$

Beraz, funtzioa honako hau da: $f(x) = -4x^3 + 6x^2$

b) Ukitzailea horizontala bada, malda nulua izango da.

$$m = 0 \rightarrow Hau\ da, f'(x) = 0 \rightarrow -12x^2 + 12x = 0 \rightarrow 12x(-x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0} \\ -x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$

$$Hau\ da, (0,0)\ eta\ (1,2)\ puntuetan\ zuzen\ ukitzailearen\ malda\ m = 0\ da.$$

10. Kalkula itzazu A, B, C eta D balioak funtzio honek: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ mutur erlatiboak izan ditzan (0,0) eta (2,2) puntuetan. (2016ko UZTAILA-A)

Funtzioa deribatuz: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \rightarrow f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$

- $f(0) = 0 \rightarrow A \cdot 0^3 + B \cdot 0^2 + C \cdot 0 + D = 0 \rightarrow \boldsymbol{D = 0}$
- $f'(0) = 0 \rightarrow 3A \cdot 0^2 + 2B \cdot 0 + C = 0 \rightarrow \boldsymbol{C = 0}$
- $f(2) = 2 \rightarrow A \cdot 2^3 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 + D = 2 \rightarrow \boldsymbol{8A + 4B = 2}$
- $f'(2) = 0 \rightarrow 3A \cdot 2^2 + 2B \cdot 2 + C = 0 \rightarrow \boldsymbol{12A + 4B = 0}$

Hortik, $\boldsymbol{A = -\frac{1}{2}\ ; B = \frac{3}{2}\ ;\ C = 0\ ;\ D = 0}$

11. Funtzio polinomiko hau emanda: $p(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2}$

a) Kalkula itzazu p(x)-ren goratze- eta beheratze-tarteak.
b) Aurkitu haren maximoak eta minimoak.
c) Ba al da x-ren balioren bat $p(x) < 0$ izatea dakarrena? Arrazoitu zergatia.

(2016ko UZTAILA-B)

Problema ebazteko, $P(x)$ funtzioa deribatuko dugu, eta hau lortuko:

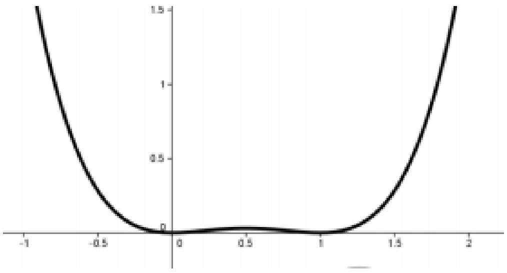
$P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Zerora berdinduz, hiru balio lortuko ditugu. x = 0, x = 0,5 eta x = 1. Beraz, $P'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = 2x(x-0.5)(x-1)$.

a) Hauek izango dira tarteak:

- Goratzea: $(0, 0,5) \bigcup (1, +\infty)$
- Beheratzea: $(-\infty, 0) \bigcup (0,5, 1)$

b) Erraz frogatzen da x = 0 eta x = 1 balioetan funtzioak minimo bat duela, eta x = 0,5 balioan funtzioak maximo bat duela.

c) Minimoak x = 0 eta x = 1 puntuetan lortzen direnez eta bietan balioak $P(0) = P(1) = 0$ direnez, funtzioa zero edo handiagoa izango da x-ren edozein baliotarako. Beraz, ez dago x-ren baliorik $P(x) < 0$ betetzen duenik



12. Polinomio hau emanda: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
   a) Zehaztu a, b eta c koefizienteak, jakinik $x = -1$ eta $x = 1$ balioetan mutur erlatiboak dituela eta gainera, koordenatu-jatorritik pasatzen dela.
   b) Aztertu bi mutur erlatibo horien izaera (maximoak ala minimoak diren) eta egin polinomioaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2015ko EKAINA-A)

a) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$x = -1$ mutur erlatiboa denez, $P'(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2a + b = 0$

$x = 1$ mutur erlatiboa denez, $P'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + 2a + b = 0$

Bi ekuazio horiek ebatzita, hau lortuko dugu: a = 0 eta b = -3. Eta, horretaz gainera, funtzio polinomikoa koordenatu-jatorritik pasatzen denez: $P(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

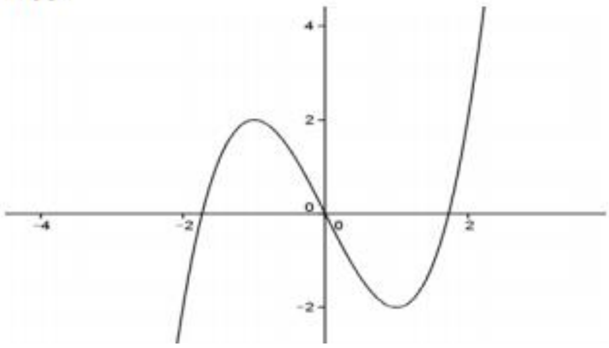
Beraz, hau da bilatutako polinomioa: $P(x)$= $x^3 - 3x$.

b) Badakigu muturren izaera (maximoa edo minimoa) bigarren deribatuaren zeinuaren araberakoa dela: $P''(x) = 6x$.

$P''(-1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ balioan, funtzioak maximo erlatibo bat du.

$P''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ balioan, funtzioak minimo erlatibo bat du.

Hau da $P(x)$-ren grafikoa:



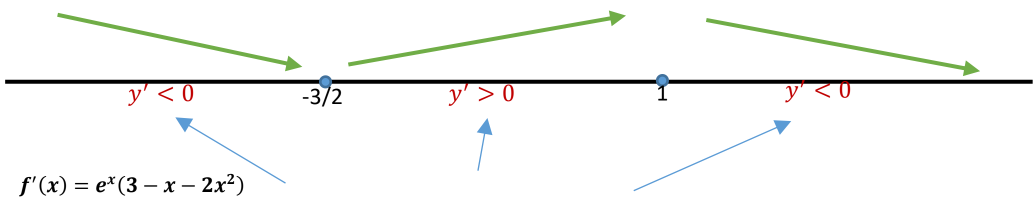
13. Izan bedi funtzio hau: $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$
   a) Kalkulatu f funtzioaren goratze- eta beheratze-tarteak.
   b) Kalkulatu f-ren mutur erlatiboak (maximo eta minimoak).

(2015ko EKAINA-B)

$f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x \rightarrow f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x \rightarrow$
$\rightarrow f'(x) = e^x(3 - 4x + 3x - 2x^2) \rightarrow \boxed{\boldsymbol{f'(x) = e^x(3 - x - 2x^2)}}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(3 - x - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cancel{e^x = 0} \\ 3 - x - 2x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$



Goratze-tarteak: $\boldsymbol{x} \in (-\frac{3}{2}, \mathbf{1})$

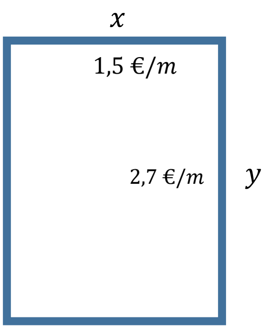
Beheratze-tarteak: $\boldsymbol{x} \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\mathbf{1}, \infty)$

Maximo erlatiboak: $x = 1, \rightarrow f(1) = \left(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2\right) e^1 = e \rightarrow \boldsymbol{M(1, e)}$

Minimo erlatiboak: $x = -\frac{3}{2}, \rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) e^{-\frac{3}{2}} = \left(-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} \rightarrow$
$\rightarrow \boldsymbol{m\left(-\frac{3}{2}, -9e^{-\frac{3}{2}}\right)}$

14. Horma irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontala eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

(2015ko UZTAILA-A)



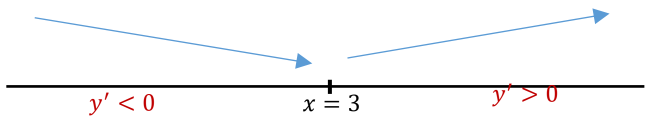
$$Azalera = 5 \rightarrow x \cdot y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{x}$$

$$Kosto\ funtzioa\!: \ F = 1{,}5 \cdot 2x + 2{,}7 \cdot 2y = 3x + 2{,}7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{x} \rightarrow$$
$$F = 3x + \frac{27}{x}$$

Beharrezko baldintza muturra izateko:

$$F' = 3 + \frac{-27}{x^2} \rightarrow F' = 0 \rightarrow 3 - \frac{27}{x^2} = 0 \rightarrow 3 = \frac{27}{x^2} \rightarrow x^2 = \frac{27}{3} \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Egiaztatuko dugu, $x = 3$ denean F kostu-funtzioak minimoa hartzen duela:



Kostua minimoa da, markoaren dimentsioak: $x = 3$ eta $y = \frac{5}{3}$

15. Funtzio hau emanda:

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+3x & baldin\ x\leq 2\\ x^2-bx-4 & baldin\ x>2\end{cases}$$

a) Aurkitu a eta b-ren balioak, jakinik f zuzen erreal osoan deribagarria dela.
b) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea x=1 abszisa puntuan.

(2015ko UZTAILA-B)

(a)

Jarraitasuna x=2 abszisa-puntuan:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+3x)=4a+6\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-bx-4)=-2b\\ f(2)=4a-6\end{array}\right] \begin{array}{c}Jarraia\ izan\ dadin\ x=2\ abszisa-puntuan:\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\\ 4a+6=-2b\to 4a+2b=-6\to \boxed{2a+b=-3}\end{array}$$

Deribagarritasuna x=2 abszisa-puntuan:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+3 & baldin\ x<2\\ 2x-b & baldin\ x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}f'(2^-)=4a+3\\ f'(2^+)=4-b\end{array}\right] \begin{array}{c}Derigarria\ izateko, albo-deribatuak\ berdinak:\\ 4a+3=4-b\to \boxed{4a+b=1}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}2a+b=-3\\ 4a+b=1\end{array}\right\}\to \boldsymbol{a=2}\ \ eta\ \ \boldsymbol{b=-7}\ funtzioa\ deribagarria\ izan\ dadin.$$

(b)

$x=1$ funtzioan ordezkatuz, puntuaren y ordenatua kalkulatuko dugu:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x & baldin\ x\leq 2\\ x^2+7x-4 & baldin\ x>2\end{cases}$$

$$x=1<2\ denez, bigarren\ funtzioan\ ordezkatuko\ dugu: f(1)=2\cdot 1^2+3\cdot 1=5$$

$$P(1,5)$$

Zuzen ukitzailearen malda lortzen da puntuaren abszisa deribatuan ordezkatuz:

$$f'(x)=\begin{cases}4x+3 & baldin\ x\leq 2\ \to\ \boldsymbol{m}=f'(1)=4\cdot 1+3=\boldsymbol{7}\\ 2x+7 & baldin\ x>2\end{cases}$$

Zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$\left.\begin{array}{r}P(1,5)\\ m=7\end{array}\right\}\to y=y_0+m(x-x_0)\ \to\ y=5+7\cdot(x-1)\ \to \boxed{\boldsymbol{y=7x-2}}$$

16. Har dezagun funtzio hau: $f(x) = ax^3 + bx + c$

c) Lor itzazu a-ren, b-ren eta c-ren balioak, funtzioa koordenatu jatorritik pasa dadin eta (1,-1) puntuan minimo bat izan dezan.

d) Hala lortutako funtzioak ba al du beste maximorik edo minimorik?

(2014ko EKAINA-A)

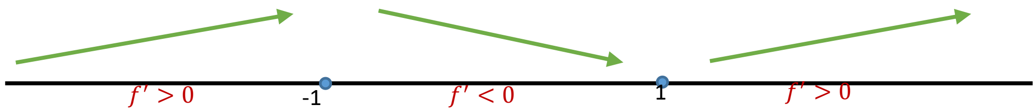
a) $f(x) = ax^3 + bx + c \;\rightarrow\; f'(x) = 3ax^2 + b$

Emandako informazioaren arabera,

- Koordenatu jatorritik pasatzen da; hau da, (0,0) puntutik:
  $$f(0) = 0 \rightarrow \boldsymbol{c = 0}$$
- (1,-1) funtzioaren puntu bat da:
  $$f(1) = -1 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c = -1 \rightarrow \boldsymbol{a + b + c = -1}$$
- (1,-1) puntuan minimo bat izateko beharrezko baldintza:
  $$f'(x_0) = 0 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 0 \rightarrow \boldsymbol{3a + b = 0}$$

Beraz; $\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{c = 0} \\ \boldsymbol{a + b + c = -1} \\ \boldsymbol{3a + b = 0} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \quad \boxed{b = -\frac{3}{2}} \quad \boxed{c = 0} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} \xrightarrow[\text{muturra}]{\text{beharrezko baldintza}} f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$



Beste maximo bat du $x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1) = 1 \rightarrow M(-1{,}1)$ abszisa-puntuan.

17. Badakigu F funtzioa puntu guztietan deribagarria dela, $(-\infty, 0]$ tartean $F(x) = 1 + 2x + Ax^2$ formulak definitzen duela eta $(0, \infty)$ tartean, berriz, formula honek: $F(x) = B + Ax$

a) Aurkitu ezazu zer balio izan behar duten A-k eta B-k aurreko baldintzak bete daitezen.

b) Irudika ezazu F.

(2014ko EKAINA-A)

a) F(x) funtzioa zatika definitutako funtzioa da:

$$F(x) = \begin{cases} Ax^2+2x+1 & x \in (-\infty, 0] \\ Ax+B & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Funtzioa deribagarria denez puntu guztietan, jarraia ere izango da.
Jarraitasunaren baldintzak $x=0$ abszisa-puntuan aplikatuz:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (Ax^2+2x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (Ax+B) = B \\ f(0) = A\cdot 0^2+2\cdot 0+1 = 1 \end{array}\right]$$

F(x) jarraia izan dadin $x=0$ abszisa-puntuan:

$$\boxed{1 = B}$$

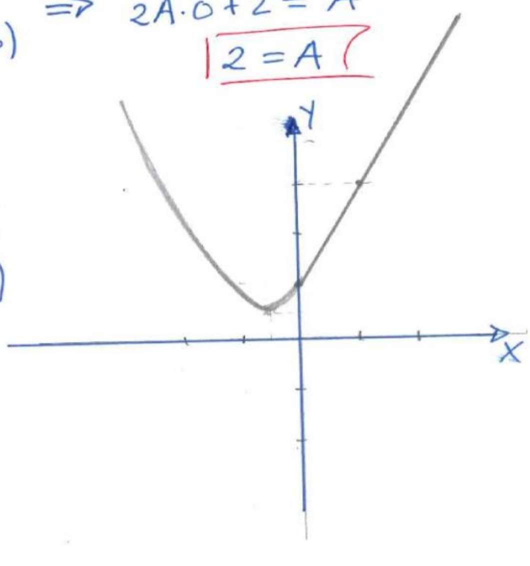
Bestetik, deribagarria izan dadin, albo-deribatuak $x=0$ puntuan berdinak izan behar dira:

$$F'(x) = \begin{cases} 2Ax+2 & x \in (-\infty, 0] \\ A & x \in (0, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} F'(0^-) = F'(0^+) \\ 2A\cdot 0+2 = A \\ \boxed{2 = A} \end{array}$$

Beraz, $\boxed{A = 2 \text{ eta } B = 1}$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2+2x+1 & x \in (-\infty, 0] \\ 2x+1 & x \in (0, \infty) \end{cases}$$



18. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funtzioa emanda, azter itzazu haren goratze- eta beheratza-tarteak eta maximo eta minimoak.
Egin itzazu f-ren gutxi gorabeherako grafiko bat, eta erantzun iezaiozu, arrazoituz, galdera honi: x-ren zenbat baliok betetzen dute f(x)=0 izatea?

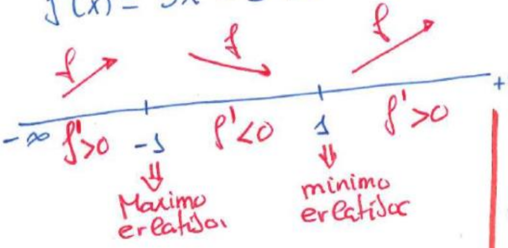
(2014ko UZTAILA-A)

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Funtzio deribatuaren ikurren azterketa egingo dugu. Gogoratu funtzio deribagarri baten deribatua positiboa bada; orduan, funtzioa gorakorra dela eta negatiboa denean beherakorra. Gorakorra izatetik beherakorra izatera igarotzen den puntuan maximo erlatiboa eta beherakorra izatetik gorakorra izatera minimo erlatiboa.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$



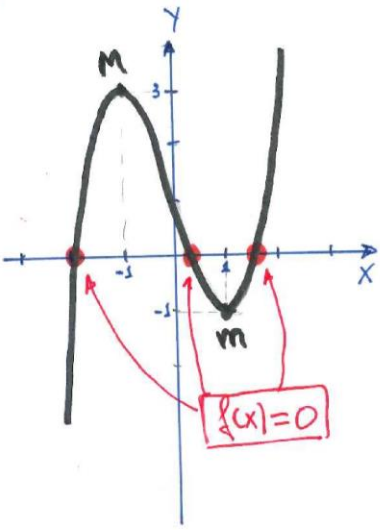
Gorakorra: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Beherakorra: $x \in (-1, 1)$

Maximo erlatiboa: $M(-1, 3)$

minimo erlatiboa: $m(1, -1)$

b) Irudikapen grafikoa:



Funtzio deribatuak emandako informazioa erabiliz ondoko adierazpen grafikoa lortu dugu. Ikus daitekenez, funtzioaren grafikak hiru puntuetan mozten du X ardatza; beraz, $f(x)=0$ egiaztatzen duten hiru balio daude.

19. Badakigu A eta B zenbaki positiboen karratuen batura 32 dela. Kalkula itzazu zenbaki horiek haien arteko biderkadura, A·B; maximoa izan dadin.

(2014ko UZTAILA-B)

Bitez X eta Y bi zenbaki positibo.

Zera egiaztatzen da, $X^2+Y^2=32 \rightarrow Y^2=32-X^2$

$Y=+\sqrt{32-X^2}$

Bi zenbakien arteko biderkadura X·Y maximoa izateko X eta Y nahi ditugu kalkulatu.

$B = X \cdot Y$ (biderkadura funtzioa maximizatzen duten balioak aurkitzea nahi dugu)

$B = X\cdot\sqrt{32-x^2}$ ($Y=\sqrt{32-x^2}$ delako)

$B=\sqrt{x^2(32-x^2)}=\sqrt{32x^2-x^4}=(32x^2-x^4)^{1/2}$

B(x) funtzioa deribatuko dugu eta B'(x) ikurrak aztertu ondoren maximoak aurkituko ditugu:

$B'(x)=\frac{1}{2}(32x^2-x^4)^{-1/2}\cdot(64x-4x^3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{64x-4x^3}{\sqrt{32x^2-x^4}}$

$B'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{64x-4x^3}{\sqrt{32x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 64x-4x^3=0$

$4x(16-x^2)=0$ → $\cancel{x=0}$ (ez da deribagarria) — a da positiboa

→ $16-x^2=0$

$16=x^2$

$x=4$ eta $\cancel{x=-4}$

0 — B'⊕ ↗ — 4 — B'⊖ ↘ — $\sqrt{32}$

4 ⇓ Maximoa

Biderkadura maximoa da $\boxed{X=4}$ eta $\boxed{Y=\sqrt{32-16}=4}$ direnean.

20. f funtzioa ekuazio honek definitzen du: $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ Kalkula itzazu, arrazoituz:

a) *f(x)* funtzioaren definizio eremua.
b) *f(x)* funtzioaren goratze- beheratze-tarteak.
c) Egin ezazu funtzio horren grafikoaren gutxi gorabeherako marrazki bat.

(2013ko EKAINA-A)

a

• $f(x) = \frac{2}{x^2-5x+6}$ funtzio arrazionala ez dago definituta x^2-5x+6 izendatzailea zero egiten duten balioetarako:

$$x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Hortaz, Dom $f(x)$: $x \in \mathbb{R} - \{2,3\}$

• Asintota bertikalak:

$$x^2-5x+6=0 \begin{cases} \boxed{x=2} \\ \boxed{x=3} \end{cases}$$

Egiaztatu dezagun $x=2$ eta $x=3$ asintota bertikalak direla albo-limiteak kalkulatuz:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2}{\underbrace{x^2-5x+6}_{=(x-2)(x-3)}} = \boxed{\frac{2}{0}} \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^-\cdot(-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{0^+\cdot(-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \boxed{\frac{2}{0}} \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{1\cdot 0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{1\cdot 0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Beraz, $x=2$ eta $x=3$ funtzioaren asintota bertikalak.

• Asintota horizontala:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2-5x+6} = \frac{2}{(-\infty)^2} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\boxed{Y=0}$ Asintota Horizontala. (X ardatza)

(gainetik hurbiltzen da)

b Gorakor- eta beherakor-tarteak, funtzioaren funtzio deribatuaren zeinuak emango ditu (beti ere deribagarria den puntuetan).

$$\boxed{f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-5x+6)-2\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}=\frac{-2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}}$$

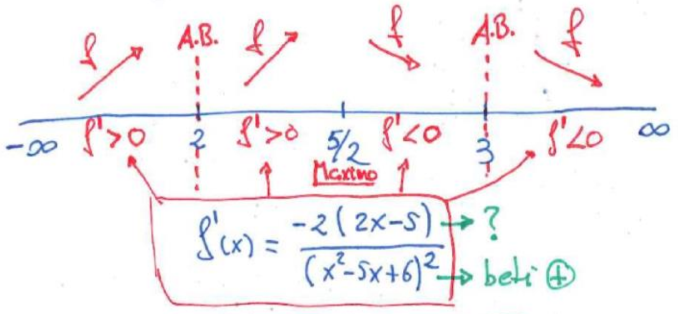
- $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}=0 \Rightarrow -2(2x-5)=0$

  $2x-5=0$

  $\boxed{x=5/2}$

- Izendatzailearen erroak:

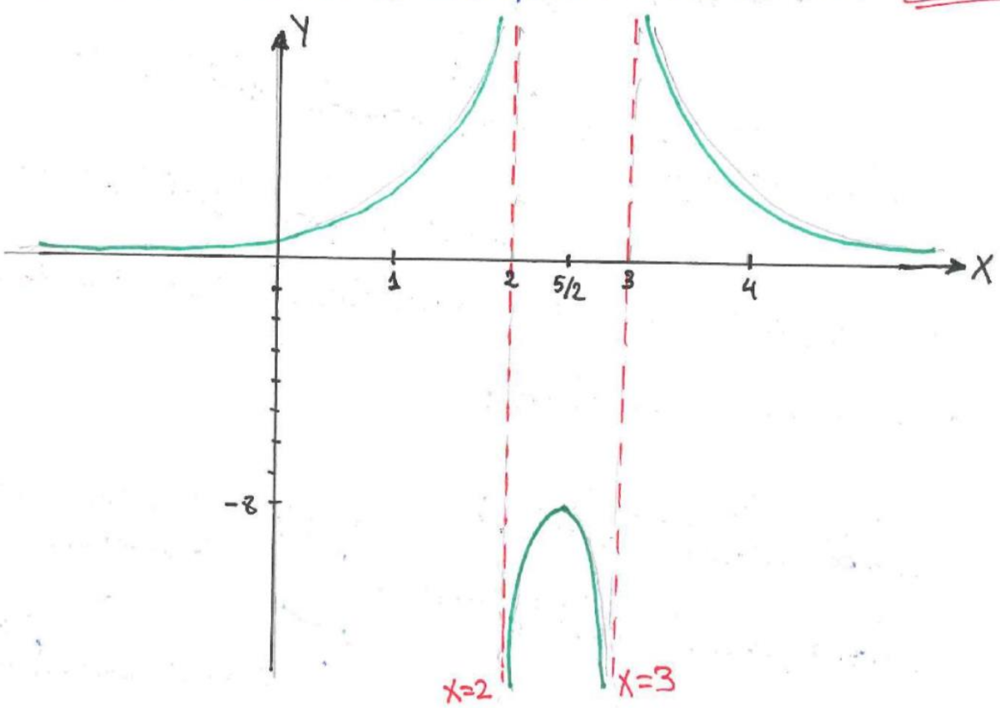
  $\boxed{x=2}$ eta $\boxed{x=3}$ (asintota bertikalak)



Gorakor-tarteak: $\boxed{x\in(-\infty,2)\cup(2,5/2)}$ Beherakor-tarteak: $\boxed{x\in(\frac{5}{2},3)\cup(3,\infty)}$

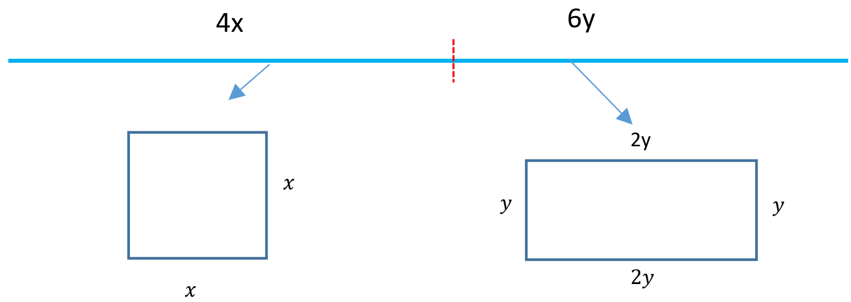
Maximo erlatiboa: $x=5/2$ abzisa puntuan $\rightarrow M(5/2, f(5/2))=\underline{M(\frac{5}{2},-8)}$

c



21. 200 cm luzeko segmentu bat bitan zatitu da. Zati batekin karratu bat eratu da, eta, bestearekin, oinarria garaiera baino bi aldiz handiagoa duen laukizuzen bat. Kalkula ezazu zati bakoitzaren luzera, baldintza hau kontuan izanik: karratuaren eta laukizuzenaren azaleren baturak minimoa izan behar du.

(2013ko EKAINA-B)

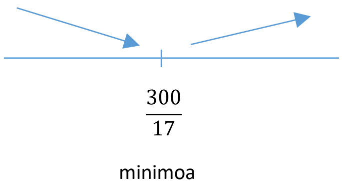


$$Baldintza: \ 4x+6y=200 \rightarrow 2x+3y=100 \ \rightarrow x=\frac{100-3y}{2}$$

$$Azalera=x^2+2y^2 \rightarrow A=\left(\frac{100-3y}{2}\right)^2+2y^2$$

$$A'=2\left(\frac{100-3y}{2}\right)\cdot\frac{-3}{2}+4y=-3\cdot\left(\frac{100-3y}{2}\right)+4y=\frac{-300+9y+8y}{2}=\frac{17y-300}{2}$$

$$A'=0 \rightarrow \frac{17y-300}{2}=0 \rightarrow 17y-300=0 \rightarrow y=\frac{300}{17}$$



$$\boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{300}}{\mathbf{17}} \ denean, \qquad \boldsymbol{x}=\frac{100-3\left(\frac{300}{17}\right)}{2}=\frac{\frac{1700-900}{17}}{2}=\frac{\mathbf{400}}{\mathbf{17}}$$

Beraz, zatien luzerak: $\boldsymbol{4x}=4\cdot\frac{400}{17}=\frac{\mathbf{1600}}{\mathbf{17}}\,\boldsymbol{cm} \ \ eta \ \ \boldsymbol{6y}=6\cdot\frac{300}{17}=\frac{\mathbf{1800}}{\mathbf{17}}\ \boldsymbol{cm}$

22. Elektronikako denden frankizia batek kalkulatu du asteko irabaziak (mila eurotan adierazita) irekia duen n denda kopuruaren mende daudela, adierazpen honen arabera: $B(n)=-4n(2n^2-15n+24)$

Arrazoituz, kalkula ezazu hau:

a) Zenbat denda izan behar dituen asteko irabaziak maximoak izan daitezen.

b) Irabazi maximo horien balioa.

(2013ko UZTAILA-A)

Deribatua zein puntutan den 0 bilatuko ditugu:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96.$$

Deribatuaren balioa zero izatea dakarten puntuak hauek dira: *n* = 1 eta *n* = 4. Maximoa zein den jakiteko, bigarren deribatua erabiliko dugu:

$$B''(n) = -48n \quad +120.$$

n = 1 denean, minimo bat dago, eta n = 4 denean, maximo bat dago. Asteko irabaziak 64.000 euro izango dira.

23. $f(x) = x^3 + Ax^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C}$ funtzioa emanda:

a) Kalkula itzazu *A, B* eta *C* parametroen balioak, funtzioak *x=0* abszisa-puntuan mutur bat izan dezan eta *x=2* puntuan beste mutur bat. Balio bakarrekoak dira parametro horiek?

b) Zehaztu ezazu zer mutur mota den (maximoa edo minimoa).

c) Irudika ezazu funtzioa ¨*C=0* kasuan

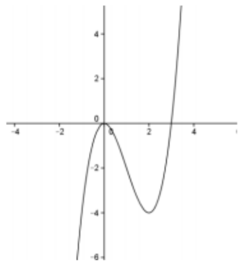
(2013ko UZTAILA-B)

a) Funtzioaren deribatua $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ da.
Mutur bat du *x* = 0 denean; beraz, *B* = 0 betetzen da.
Mutur bat du *x* = 2 denean; beraz, *A* = –3 betetzen da.
A-ren eta *B*-ren balioak finkatuta gelditu dira, baina *C*-k edozein balio erreal har dezake.

Beraz, hau da funtzioa: $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

b) *f*-ren bigarren deribatua hau da: $f'' = 6x - 6$.
x = 0 denean, balio maximo bat du, eta x = 2 denean, berriz, minimo bat.

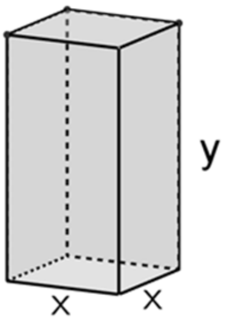
c) Hau da $f(x) = x^3 - 3x^2$ funtzioaren grafikoa:



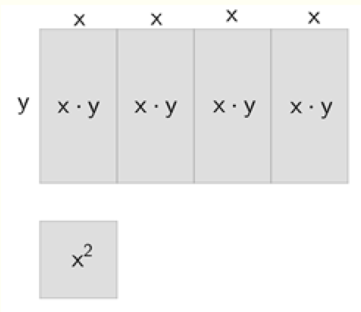
25. Enpresa batek estalkirik gabeko kartoizko kaxak egiten ditu, 4000 zentimetro kubikoko bolumenekoak. Kaxen oinarria karratua da.

Kalkula ezazu zer altuera duen eta oinarrian zer alde izan behar duen kaxa bakoitzak fabrikazioan ahal den kartoirik gutxiena erabiltzeko.

(2012ko EKAINA-B)



Kaxaren garapena eta azalera osoa:



$$Azalera = x^2 + 4xy$$

Baldintza, bolumena 4000 cm^3:

$$B_{kaxa} = oinaren\ azalera \cdot altuera$$

$$4000 = x^2 \cdot y \ \Rightarrow y = \frac{4000}{x^2}$$

Azalera funtzioan ordezkatu

Kaxaren azalera funtzioa:

$$A(x) = x^2 + 4x\frac{4.000}{x^2} \Rightarrow A(x) = x^2 + \frac{16.000}{x}$$

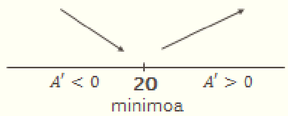
Deribatuaren erroen artean aurkituko dugu funtzioaren minimoa:

$$A'(x) = 2x + \frac{-16.000}{x^2}$$

$$A'(x) = 0 \ \Rightarrow 2x + \frac{-16.000}{x^2} = 0 \ \Rightarrow 2x = \frac{16.000}{x^2} \Longrightarrow 2x^3 = 16.000 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^3 = \frac{16.000}{2} \Longrightarrow x^3 = 8.000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8.000} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 20\ cm}$$

Egiazta dezagun $\boldsymbol{x = 20\ cm}$ funtzioaren minimoa dela:



Kaxen fabrikazioan ahalik eta kartoi gutxien erabiltzeko kaxaren neurriak:

$$\boldsymbol{x = 20\ cm}$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{4.000}{20^2} = \boldsymbol{10\ cm}$$

27. Denda batean olioa saltzen da 2 eurotan litroa. x litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adierazita) hauek dira: $0{,}5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu C-ren balioa eta lortutako etekin maximoa:

(2012ko UZTAILA-B)

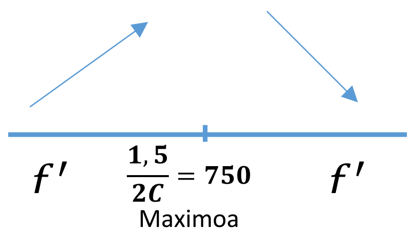
Olioa 2 €/l-an saltzen denez, x litro saldutakoan bildutako dirua: $2x$

Gastuak: $0{,}5x + Cx^2$

Orduan, Etekinak = Sarrerak – gastuak → $\underbrace{f(x)}_{etekinak} = \underbrace{2x}_{sarrerak} - \left(\underbrace{0{,}5x + Cx^2}_{gastuak}\right)$

$$f(x) = 2x - 0{,}5x - Cx^2 = 1{,}5x - Cx^2.$$

$$f'(x) = 1{,}5 - 2Cx.$$



$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; = 1{,}5 - 2Cx = 0 \rightarrow 1{,}5 = 2Cx \;\rightarrow \boxed{x = \frac{1{,}5}{2C}}$$

$$\frac{1{,}5}{2C} = 750 \;\rightarrow 1{,}5 = 750 \cdot 2C \;\rightarrow 1{,}5 = 1500C \;\rightarrow \boldsymbol{C} = \frac{\mathbf{1,5}}{\mathbf{1500}} = \mathbf{0,001}$$

Etekin maximoa:

$$f(x) = 1{,}5x - 0{,}001 \cdot x^2 \xrightarrow{x=750} f(x) = 1{,}5 \cdot 750 - 0{,}001 \cdot 750^2 = \mathbf{562,50}\ €$$

28. Izan bedi $f(x) = x^2e^{-2x}$ funtzioa.

a) Aztertu funtzioaren gorapen- eta beherapen-tarteak.

b) Aztertu funtzioaren maximo eta minimoak eta egin haren grafikoaren eskema.

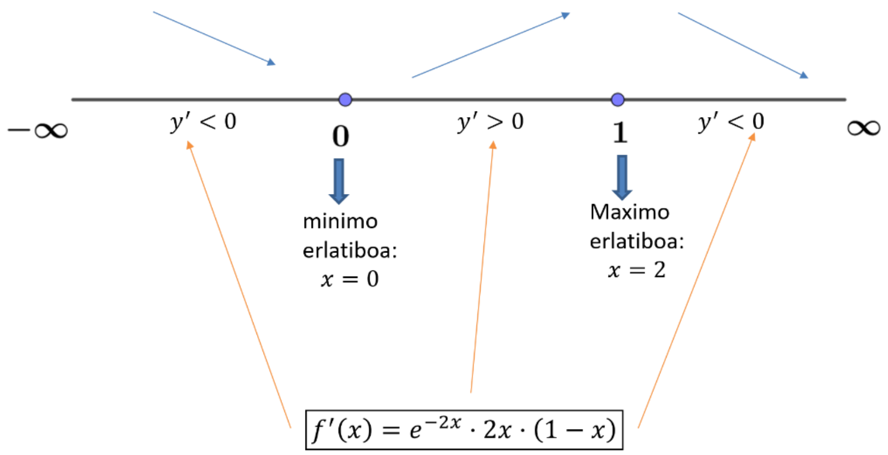
2011ko EKAINA-A

$$y = x^2e^{-2x}$$

$$y' = 2xe^{-2x} + x^2e^{-2x}\cdot(-2) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$$

$$y' = e^{-2x}\cdot(2x - 2x^2) = e^{-2x}\cdot 2x\cdot(1-x)$$

$$Puntu\ kritikoak: e^{-2x}\cdot 2x\cdot(1-x) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \cancel{e^{-2x} = 0} \\ \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = 1} \end{array}$$



Laburtuz

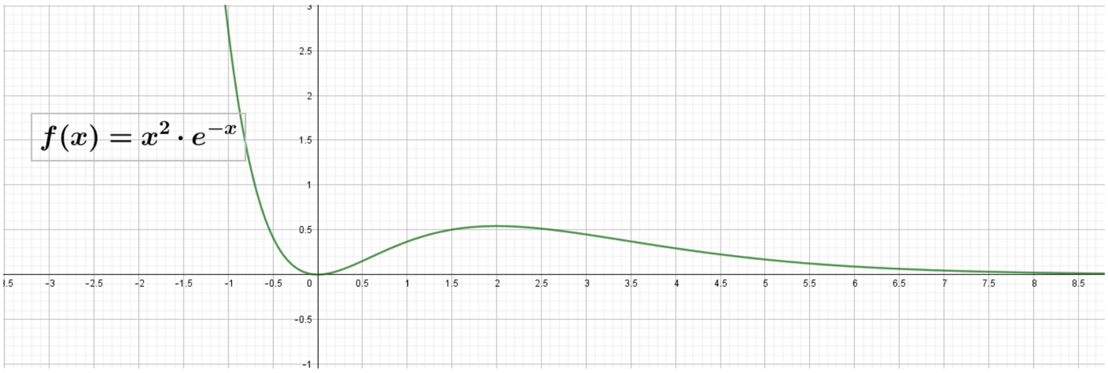
Gorapen tarteak: $(0,1)$

Beherapen tarteak: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Maximo erlatiboa: $x = 1 \rightarrow f(1) = 1^2\cdot e^{-1} = e^{-1} \rightarrow Max.M(2, e^{-1})$

minimo erlatiboa: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2\cdot e^{-2} = 0; minimoa: m(0,0)$

Adierazpen grafikoa:



$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0 \ \ (e^{-2x} \gg x^2 \text{ delako})$$

$$y = 0 \ Asintota\ horizontala\ x \to \infty\ doala$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-2x} = \infty^2 e^{-2\cdot(-\infty)} = \infty$$

30. Aztertu funtzio honen muturrak eta asintotak: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Egin grafikoaren eskema

(2017ko EKAINA-B)

(a) Definizio-eremua:

$x - 1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ *denean funtzioa ez dago definituta*

Beraz:

$$Definizio - Eremua \rightarrow \boldsymbol{D.E.}: \mathbb{R} - \{\boldsymbol{1}\}$$

(b,c) 1. Deribatuaren azterketa

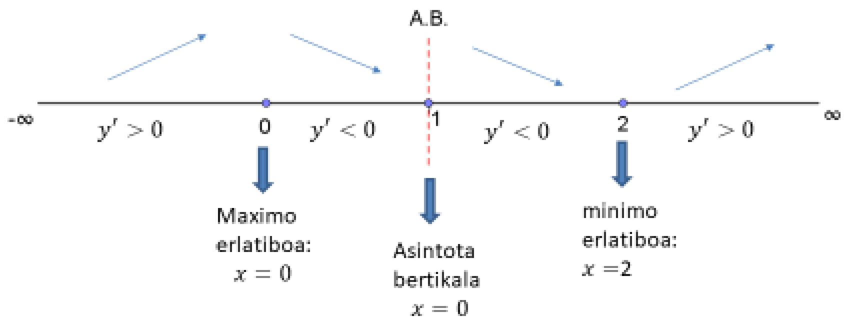
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$\boldsymbol{y'} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Puntu kritikoak:

- $y' = 0 \rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{x = 2} \end{matrix}$
- *Funtzioa ez da deribagarria:* $x - 1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

Balio hauek zuzen errealean kokatuz, X ardatza hainbat tartetan banatzen dute. Tarte bakoitzean deribatuaren zeinua konstantea da (+ edo -).



$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y'(-1) = \frac{-1\cdot(-1-2)}{(-1-1)^2} > \mathbf{0}$$

$$y'(0{,}5) = \frac{0{,}5\cdot(0{,}5-2)}{(0{,}5-1)^2} < \mathbf{0}$$

$$y'(1{,}5) = \frac{1{,}5\cdot(1{,}5-2)}{(1{,}5-1)^2} < \mathbf{0}$$

$$y'(3) = \frac{3\cdot(3-2)}{(3-1)^2} > \mathbf{0}$$

Laburtuz

Gorapen tarteak: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Beherapen tarteak: $(0,1) \cup (1,2)$

Maximo erlatiboa: $x = 0 \;\rightarrow f(0) = \frac{0^2}{0-1} = 0\,; Maximoa\!: \; M(0,0)$

miniimo erlatiboa: $x = 2 \;\rightarrow f(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4\,; minimoa\!: m(2,4)$

34. Merkatari batek kafea saltzen du 2 € eta 75 zentimotan kiloa. Bi motatako gastuak ditu, merkantziaren garraioa eta herri-ogasunari ordaindu beharreko zerga bat. Saltzen duen kilo bakoitzeko, garraioaren gastua 25 zentimokoa da. Herri-ogasunari ordaindu beharreko euro kopurua kalkulatzeko, saldutako kilo kopuruaren karratua zati 1200 egin behar da. Aurreko datuekin kalkulatu merkatariak saldu behar duen kilo kopurua irabazia maximoa izateko, eta kalkulatu irabazi maximo hori.

(2010ko UZTAILA-A).

Kafea saltzen du: $2€\ eta\ 75\ zentimo = 2{,}75\ €$

Saldutako kafe kiloak: $x\ (kilo)$

Sarrerak: $2{,}75 \cdot x\ \ (€)$

Garraio gastuak: $0{,}25x\ (€)$

Herri-ogasunari ordaindu: $\frac{x^2}{1200}\ \ (€)$

Beraz, irabaziak ematen dituen funtzioa:

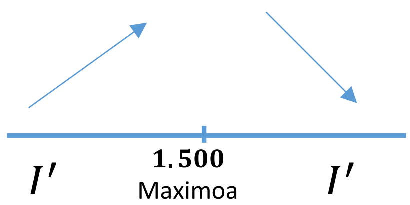
$$I = Sarrerak - Gastuak = 2{,}75 \cdot x - 0{,}25 \cdot x - \frac{x^2}{1200}$$

$$I(x) = 2{,}50 \cdot x - \frac{x^2}{1200} = 2{,}50 \cdot x - \frac{1}{1200} \cdot x^2$$

Funtzioaren deribatuaren erroen artean, maximoa aurkituko dugu:

$$I'(x) = 2{,}50 - \frac{2}{1200} \cdot x = 2{,}50 - \frac{1}{600} \cdot x$$

$$I'(x) = 0 \ \rightarrow\ 2{,}50 - \frac{1}{600} \cdot x = 0 \ \rightarrow\ 2{,}50 = \frac{1}{600} \cdot x \ \rightarrow x = 1.500\ kg$$



Irabaziak maximoak izan daitezen 1.500 kg kafe saldu behar ditu. Orduan, irabazi maximoak:

$$I(x) = 2{,}50 \cdot x - \frac{x^2}{1200} \ \rightarrow I(1.500) = 2{,}50 \cdot 1.500 - \frac{1.500^2}{1200} = \mathbf{1.875}\ €$$